

Esercizi

Teoria
relatività generale

Esercizio

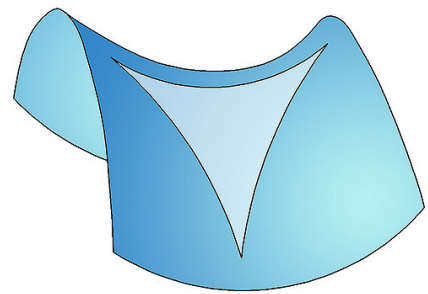
Secondo la teoria della relatività generale «nessun esperimento che si possa compiere in un ambiente chiuso permette di capire, a chi sta al suo interno, se si trova in un ascensore in caduta libera o in un'astronave soggetta a una forza totale nulla». Perché bisogna precisare che l'esperimento sia limitato a uno spazio ristretto e a un intervallo di tempo breve?

Soluzione

Perché vale il principio di equivalenza secondo il quale il campo gravitazionale deve essere omogeneo, ossia l'accelerazione di gravità deve essere la stessa in direzione, verso e modulo in ogni punto dello spazio considerato.

Esercizio

Una superficie a forma di sella come quella della figura rappresenta un modello di spazio curvo in due dimensioni. Quello disegnato sulla sella è un triangolo isoscele con due angoli di 48° e l'angolo al vertice di 52° . La geometria in cui è definito questo triangolo è ellittica o iperbolica?



Soluzione

Dato che la somma degli angoli interni del triangolo è 148° (quindi minore di 180°), si tratta di una geometria iperbolica.

Esercizio

Un pianeta si muove seguendo la curvatura dello spazio-tempo. Lo spazio-tempo rimane invariato durante il suo movimento?

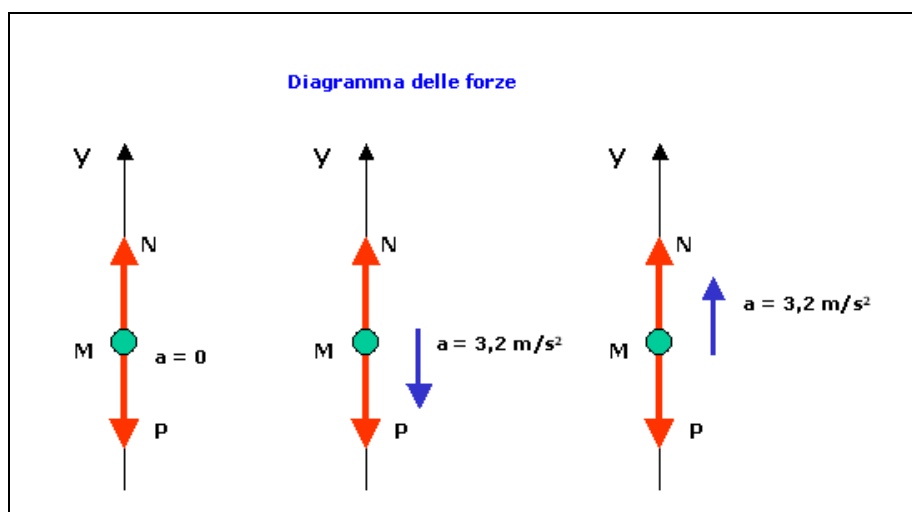
Soluzione

Lo spaziotempo non rimane invariato perché la sua geometria è deformata dalla massa e dall'energia, per cui una diversa posizione del pianeta determina una diversa curvatura dello spaziotempo.

Esercizio

Un passeggero di massa $m=72.2$ kg sta su una bilancia nella cabina di un ascensore. Che cosa segna la bilancia quando l'accelerazione assume i valori dati in figura?

Soluzione



- 1° caso: $a=0$ (velocità costante)

$$N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg = 72,2 \cdot 9,8 = 708\text{N}$$

La bilancia segna il peso effettivo del passeggero



- 2° caso: $a=-3,2$ m/s²

$$N - Mg = -Ma \Rightarrow N = Mg - Ma = M \cdot (g - a) = 72,2 \cdot (9,8 - 3,2) = 477\text{N}$$

La bilancia segna un peso inferiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver dimagrito 23,6 kg ($M = P/g = 231/9,8 = 23,6$ kg)

- 3° caso: $a=3,2$ m/s²

$$N - Mg = Ma \Rightarrow N = M \cdot (g + a) = 72,2 \cdot (9,8 + 3,2) = 939\text{N}$$

La bilancia segna un peso superiore di 231 N ed il passeggero pensa di aver ingrassato 23,6 kg ($M = P/g = 231/9,8 = 23,6$ kg)



- 4° caso: $a=9,8$ m/s² (caduta libera)

$$N - Mg = -Mg \Rightarrow N = Mg - Mg = 0\text{ N}$$

La bilancia segna zero ed il passeggero pensa di essere in assenza di gravità (è sospeso).



Esercizio

Un progetto scientifico prevede che una grande stazione spaziale, nella quale è creata una forza di gravità artificiale, possa essere costituita da un cilindro di raggio $r=300$ m, che ruota intorno al suo asse con velocità angolare ω rispetto a un sistema di riferimento inerziale S . L'asse di rotazione del cilindro è fisso nel sistema S . Calcola la velocità di rotazione necessaria perché gli oggetti sul suolo della stazione rotante abbiano lo stesso peso che hanno sulla Terra.

Soluzione

Poiché ci troviamo di fronte a un moto circolare uniforme, è presente solo l'accelerazione centripeta:

$$a_c = \omega^2 r$$

Affinché gli oggetti sul suolo della stazione rotante abbiano lo stesso peso che hanno sulla Terra, è necessario che l'accelerazione centripeta abbia un valore pari all'accelerazione di gravità terrestre $a_c=9,81$ m/s². Pertanto, la velocità di rotazione della stazione spaziale attorno al proprio asse deve essere:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}} = \sqrt{\frac{9,81}{300}} = 0,181 \text{ rad / s}$$

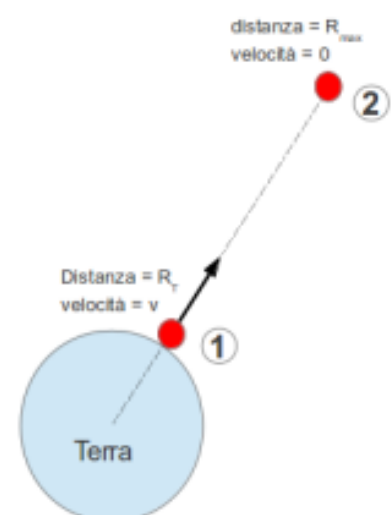
Esercizio

a) Determina la formula per calcolare il valore critico del raggio per il quale un corpo celeste diventa un buco nero; b) Calcola quale raggio dovrebbe avere la Terra e Giove per diventare un buco nero.

I dati sono: massa Terra $M_T=5,98 \times 10^{24}$ kg; raggio Terra $R_T=6,378 \times 10^6$ m; massa Giove $M_G=1,898 \times 10^{27}$ kg; raggio Giove $R_G=6,99 \times 10^7$ m; costante gravitazione universale $G=6,67 \times 10^{-11}$ Nxm/kg².

Soluzione

La velocità di fuga dalla Terra è la velocità minima con cui un corpo deve essere lanciato dalla superficie terrestre perché se ne allontani all'infinito. Supponiamo che un corpo di massa m sia lanciato verticalmente dalla superficie della Terra con una velocità iniziale di modulo v_0 . La sua energia meccanica è:



$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T}$$

La condizione che deve verificarsi affinché il corpo si allontani indefinitamente dalla Terra è che l'energia meccanica, costante durante il moto (principio di conservazione energia meccanica per la presenza di sole forze conservative), sia maggiore di zero o, al limite, nulla. Nel caso sia nulla, la velocità di lancio v_0 del corpo coincide con la sua velocità di fuga:

$$0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

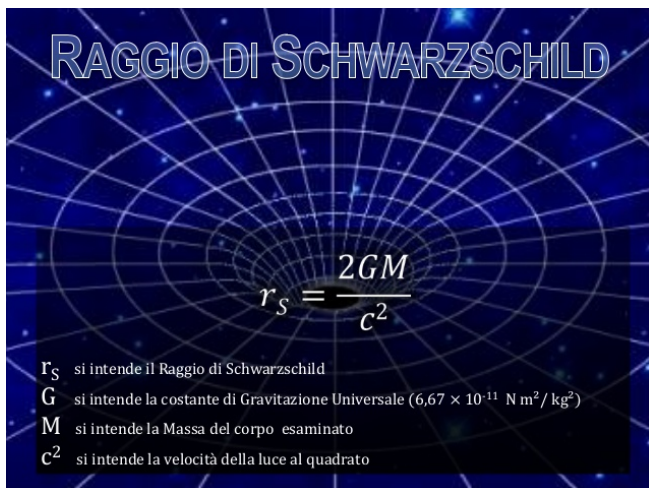
Sostituendo i dati si ottiene:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

La stessa formula vale per Giove:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_G}{R_G}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,898 \cdot 10^{27}}{6,99 \cdot 10^7}} = 60.000 \text{ m/s} = 60 \text{ km/s}$$

La velocità di fuga è indipendente dalla massa del corpo lanciato dalla Terra o da Giove.



Nella formula della velocità di fuga, il raggio R è al denominatore. Quindi, se la massa di un corpo celeste rimane costante mentre il suo raggio diminuisce (come accade a una stella alla fine della sua "vita" per effetto dell'esaurimento del proprio combustibile nucleare), la velocità di fuga da esso aumenta. Se il raggio R continua a diminuire, la velocità di fuga può diventare superiore alla velocità c della luce nel vuoto. Però, la teoria della relatività di Einstein

stabilisce che nessun oggetto può viaggiare a una velocità superiore a c , per cui è impossibile che un oggetto possa allontanarsi da questo corpo celeste.

Questo corpo celeste si è trasformato in un **buco nero**, ossia in un pozzo gravitazionale da cui nulla, neppure la luce, può uscire. Il valore critico di R per il quale, dato un corpo celeste di massa M , si ha $v_f=c$ è detto *raggio di Schwarzschild*:

$$v_f = c = \sqrt{\frac{2GM_G}{R_G}} \Rightarrow R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Per tutti i corpi celesti è possibile calcolare il raggio di Schwarzschild, ma non tutti possono diventare dei buchi neri (una stella per diventare un buco nero deve avere una massa superiore a tre volte quella del Sole). Quindi, calcoliamo, per fini puramente matematici, il raggio di Schwarzschild per la Terra e il Sole:

$$R_s = \frac{2GM_T}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 9 \text{ mm} \quad R_s = \frac{2GM_S}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 3 \text{ km}$$

Questi valori indicano che la Terra, per diventare un buco nero, deve avere un raggio di circa 9 mm e il Sole di circa 3 km.

Esercizio

Sia data una stella di neutroni (pulsar) di raggio r e periodo T . Spiega perché due orologi, inizialmente sincronizzati e posti uno al centro e l'altro sul bordo della stella, non lo sono più col passare del tempo e ricava la relazione tra gli intervalli di tempo Δt_A e Δt_B misurati da ciascuno di essi. Si trascurino gli effetti della gravità della stella sullo spaziotempo, effetti che in realtà sono rilevanti ma difficili da trattare per le nostre conoscenze.

Soluzione

Dal punto di vista di un osservatore al centro del disco, l'orologio A è fermo, mentre l'orologio B si muove con velocità uniforme:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Considerando un breve intervallo di tempo, per questo orologio si verifica la dilatazione dei tempi, per cui:

$$\Delta t_A = \gamma \Delta t_B$$

$$\text{dove: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\pi r}{cT}\right)^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2\pi r}{cT}$$